

# BIGÈBRES QUASI-LIE ET BOUCLES DE LIE

MOMO BANGOURA

**ABSTRACT.** In this work, we define the quasi-Poisson Lie quasigroups, dual objects to the quasi-Poisson Lie groups and we establish the correspondence between the local quasi-Poisson Lie quasigroups and quasi-Lie bialgebras (up to isomorphism).

**Résumé :** Dans ce travail, nous définissons les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson, objets duaux des groupes de Lie quasi-Poisson et nous établissons une correspondance biunivoque (à isomorphisme près) entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

## CONTENTS

1. Introduction	1
2. Boucles de Lie mono-alternatives à droite	2
3. Groupes de Lie quasi-doubles	5
4. Bigèbres quasi-Lie	11
5. Quasi-groupes de Lie quasi-Poisson	13
References	20

## 1. INTRODUCTION

Les groupes de Lie-Poisson étant les limites classiques des algèbres de Hopf, les groupes de Lie quasi-Poisson [10, 11] sont les limites classiques des quasi-algèbres de Hopf introduites par Drinfeld [6], et les objets infinitésimaux sont appelés les quasi-bigèbres de Lie dans [6] et quasi-bigèbres jacobienues dans [11]. Contrairement aux notions de bigèbre de Lie et groupe de Lie-Poisson [5, 12, 2, 15, 14], les notions de quasi-bigèbre de Lie et de groupe de Lie quasi-Poisson ne sont pas auto-duales; l'objet dual d'une quasi-bigèbre de Lie est appelé une quasi-bigèbre co-jacobienne dans [11, 3]. Nous l'appellerons bigèbre quasi-Lie. Ici, nous nous proposons de

---

Visiting Scientist at The Abdus Salam ICTP

2000 *Mathematics Subject Classification.* 17B70 17A30.

*Keywords.* Action, Lie algebra, Akivis algebra, quasi-Lie bialgebra, right mono-alternative Lie loop, Lie group, Lie quasi-bialgebra, quasi-double, quasigroup, quasi-Poisson

*Mots clés.* Action, algèbre de Lie, algèbre d'Akivis, bigèbre quasi-Lie, boucle de Lie mono-alternative à droite, groupe de Lie, quasi-bigèbre de Lie, quasi-double, quasi-groupe, quasi-poisson.

construire l'objet dual d'un groupe de Lie quasi-Poisson, c'est-à-dire un objet géométrique généralisant les groupes de Lie-Poisson dont l'espace tangent en un élément distingué est muni d'une structure de bigèbre quasi-Lie et nous convenons d'appeler cet objet quasi-groupe de Lie quasi-Poisson. Plus précisément, un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson est un  $G$ -espace quasi-Poisson au sens de [1], muni d'une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite avec certaines relations de compatibilité entre les deux structures, notamment celle généralisant la multiplicativité ([15, 14]) du champ de bivecteurs qui est satisfaite dans le cas des groupes de Lie-Poisson. Pour cela, on se sert de la théorie des boucles de Lie mono-alternatives à droite [18] en introduisant les notions de groupe de Lie quasi-double et d'algèbre de Lie quasi-double dont les propriétés font ressortir l'action d'un groupe de Lie sur une boucle de Lie et d'une action par défaut de cette boucle de Lie sur le groupe de Lie. Un groupe de Lie quasi-double est un triplet formé d'un groupe de Lie, d'un sous-groupe de Lie fermé et d'une sous-variété fermée du groupe de Lie, laquelle est munie d'une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite, le triplet vérifiant un certain nombre de propriétés; l'objet infinitésimal associé est appelé une algèbre de Lie quasi-double. Cette construction généralise certains résultats de [15] sur les groupes de Lie doubles et algèbres de Lie doubles; ces dernières sont aussi appelées algèbres de Lie bicroisées dans [12].

Dans la section 2 nous faisons un rappel de quelques notions sur les boucles de Lie et les algèbres d'Akivis.

Dans la section 3, on définit et on étudie les groupes de Lie quasi-doubles et les algèbres de Lie quasi-doubles en établissant une correspondance entre les deux notions tout en faisant ressortir la compatibilité entre les différentes opérations les définissant.

Dans la section 4, on fait un bref rappel sur les bigèbres quasi-Lie en montrant leur lien d'une part avec les algèbres de Lie quasi-doubles, et d'autre part avec les algèbres d'Akivis.

La dernière section recouvre l'essentiel du travail à savoir la définition des quasi-groupes de Lie quasi-Poisson et l'établissement d'une correspondance bijective entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

## 2. BOUCLES DE LIE MONO-ALTERNATIVES À DROITE

Dans cette section, nous faisons un rappel sur les boucles de Lie en reprenant les définitions et certains résultats de [16, 17, 18].

**Définition 1.** *Une boucle de Lie est une variété analytique réelle  $B$  munie d'une opération interne analytique*

$$\begin{aligned} m : B \times B &\longrightarrow B \\ (a, b) &\longrightarrow a.b = m(a, b) \end{aligned}$$

admettant un élément neutre  $\varepsilon$ , vérifiant

$$a.\varepsilon = \varepsilon.a = a$$

pour tout  $a \in B$ , telle que les équations

$$a.b = c \quad \text{et} \quad b.a = c$$

admettent des solutions uniques (notées respectivement  $a \setminus c$  et  $c/a$ ) et les applications

$$(a, b) \longrightarrow b \setminus a, \quad (a, b) \longrightarrow a/b$$

sont analytiques.

Ainsi, comme on le voit, tout groupe de Lie est une boucle de Lie. Si les trois opérations

$$(a, b) \longrightarrow ab, \quad (a, b) \longrightarrow a/b, \quad (a, b) \longrightarrow b \setminus a$$

sont définies localement au voisinage de  $\varepsilon$ , on dit que  $B$  est une boucle de Lie locale.

**Remarque :** L'unicité des solutions dans une boucle de Lie des équations  $a.b = c$  et  $b.a = c$  signifie que les translations à gauche et à droite par un élément  $a \in B$ , notées respectivement par  $\lambda_a$  et  $\rho_a$ , sont des difféomorphismes. L'espace tangent en l'identité à toute boucle de Lie est muni d'une structure généralisant la notion de structure d'algèbre de Lie, et dont les propriétés découlent de celles de la boucle de Lie. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

**Définition 2.** Une algèbre d'Akivis  $(A, [.,.], < ., ., . >)$  est un espace vectoriel  $A$  muni d'une application bilinéaire antisymétrique

$$\begin{aligned} [.,.] &: A \times A \longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow [x, y] \end{aligned}$$

et d'une application trilinéaire

$$\begin{aligned} < ., ., . > &: A \times A \times A \longrightarrow A \\ (x, y, z) &\longrightarrow < x, y, z > \end{aligned}$$

telles que

$$\sum_{\sigma \in S_3} (\text{Sign} \sigma) < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)} > = \sum_{\bigcirc} [[x_1, x_2], x_3]$$

où  $S_3$  désigne le groupe des permutations de  $(1, 2, 3)$ ,  $\text{Sign} \sigma$  la signature de  $\sigma \in S_3$  et  $\sum_{\bigcirc}$  désigne la somme sur les permutations circulaires de  $x_1, x_2, x_3$ .

Ainsi, toute algèbre de Lie détermine une structure d'algèbre d'Akivis en prenant  $< ., ., . > = 0$ .

Pour une boucle de Lie locale  $B$ , on montre dans [7] qu'il existe une structure

d'algèbre d'Akivis sur  $T_\varepsilon B$ , l'espace tangent en l'identité, déterminée par les opérations suivantes:

$$[x, y] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} ((x(t)y(t)) / ((y(t)x(t)))|_{t=0}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} (((x(t)y(t))z(t) / (x(t)(y(t)z(t))))|_{t=0}$$

pour  $x, y, z \in T_\varepsilon B$ , où  $x(t), y(t), z(t)$  sont des courbes de classe  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) dans  $B$ , passant par le point  $\varepsilon$  avec les vecteurs tangents  $x, y, z$  respectivement.

L'algèbre d'Akivis ainsi décrite est appelée algèbre d'Akivis de la boucle de Lie  $B$ .

Nous allons à présent définir une classe de boucles de Lie locales avec laquelle nous travaillerons dans la suite.

**Définition 3.** Une boucle de Lie locale  $B$  est dite *mono-alternative à droite*, si pour tous entiers  $k, l \in \mathbb{Z}$  et pour tous  $a, b \in B$ , voisins de  $\varepsilon$ , on a :

$$(ab^k)b^l = ab^{k+l}.$$

**Remarque :** La formule ci-dessus exprime d'une part une associativité faible de la multiplication définie sur  $B$ , d'autre part l'existence d'un inverse pour tout élément  $a \in B$ , noté  $a^{-1}$ . Par convention, on a pour tout  $a \in B$ ,  $a^0 = \varepsilon$ ,  $a^{-k} = (a^{-1})^k$  et donc  $\rho_a^{-1} = \rho_{a^{-1}}$ .

**Exemple 1.** Soit  $SH(n)$  l'ensemble des matrices hermitiennes  $n \times n$  définies positives de déterminant 1 et  $SU(n)$  le groupe spécial unitaire d'ordre  $n$ ; considérons la décomposition polaire du groupe de Lie réel  $SL(n, \mathbb{C})$  des matrices complexes  $n \times n$  de déterminant 1,

$$SL(n, \mathbb{C}) = SU(n) \times SH(n).$$

Alors  $SH(n)$  muni de la multiplication définie par la projection sur  $SH(n)$  du produit matriciel dans  $SL(n, \mathbb{C})$ , est une boucle de Lie mono-alternative à droite. Explicitement, la multiplication sur  $SH(n)$  est définie par

$$m(a, b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a, b \in SH(n).$$

En effet tout élément  $d \in SL(n, \mathbb{C})$  se décompose de manière unique sous la forme  $d = ga$ , où  $g \in SU(n)$  et  $a \in SH(n)$ ; comme  $(\bar{g})^t g = I_n$  et  $(\bar{a})^t = a$  par définition de  $SU(n)$  et  $SH(n)$ , multipliant  $d$  à gauche par la conjuguée de sa transposée, on obtient  $(\bar{d})^t d = a^2$ ; d'où  $a = [(\bar{d})^t d]^{\frac{1}{2}}$  est la projection de  $d$  sur  $SH(n)$ . Pour tous  $a, b \in SH(n)$ , distincts de  $I_n$  et  $b \neq a^{-1}$ , le produit  $ab$  n'est élément ni de  $SH(n)$ , ni de  $SU(n)$ , c'est un élément de  $SL(n, \mathbb{C})$ . Comme  $(\bar{a})^t = a$  et  $(\bar{b})^t = b$  par définition de  $SH(n)$ , de ce qui précède, la projection du produit  $ab$  sur  $SH(n)$  est

$$m(a, b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a, b \in SH(n).$$

On vérifie sans peine que  $(SH(n), m)$  est une boucle de Lie mono-alternative à droite.

De même, l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives  $n \times n$  et l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives  $n \times n$  sont des boucles de Lie mono-alternatives à droite, la multiplication  $m$  étant définie comme dans l'exemple ci-dessus.

### 3. GROUPES DE LIE QUASI-DOUBLES

Les groupes de Lie quasi-doubles sont des généralisations naturelles des groupes de Lie doubles [15].

**Définition 4.** *Un groupe de Lie quasi-double est un triplet  $(G, G_1, G_2)$ , où*  
*1)  $G$  est un groupe de Lie et  $G_1$  un sous-groupe de Lie fermé de  $G$ ;*  
*2)  $G_2$  est une sous-variété fermée de  $G$  munie de deux applications analytiques*

$$\alpha : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_1 \quad \text{et} \quad m : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_2$$

*satisfaisant l'identité*

$$(ab)_G = \alpha(a, b)m(a, b) \quad \forall a, b \in G_2,$$

*telles que  $m$  définit sur  $G_2$  une structure de boucle de Lie mono-alternative à droite;*

*3) l'application*

$$\begin{aligned} \omega : G_1 \times G_2 &\longrightarrow G, \\ (g, a) &\longrightarrow ga \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme.*

Si  $G_1$ ,  $G_2$  et  $\omega$  sont définis localement, on dit que  $(G, G_1, G_2)$  est un groupe de Lie quasi-double local.

**Remarques :** Si  $\alpha(a, b) = e$ ,  $\forall a, b \in G_2$ , où  $e$  désigne l'élément neutre de  $G$ , alors  $G_2$  est aussi un sous-groupe de Lie de  $G$  et le triplet  $(G, G_1, G_2)$  définit un groupe de Lie double au sens de [15]. Par ailleurs, en identifiant  $G$  avec  $G_1 \times G_2$  par  $\omega$ , on voit que  $\alpha$  et  $m$  sont respectivement les projections sur  $G_1$  et  $G_2$  de la restriction de la multiplication de  $G$  à  $G_2$ .

Nous allons à présent montrer que si  $(G, G_1, G_2)$  est un groupe de Lie quasi-double, alors il existe deux applications analytiques

$$\chi : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_1 \quad \text{et} \quad \sigma : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_2$$

telles que  $\sigma$  définisse une action du groupe de Lie  $G_1$  sur la variété  $G_2$  et  $G_2$  agisse sur  $G_1$  par  $\chi$  modulo l'application  $\alpha$ . En effet si  $g \in G_1$  et  $a \in G_2$ , alors  $ag \in G$ ; par conséquent d'après la condition (3) de la définition précédente, il existe un unique élément  $g' \in G_1$  et un unique élément  $a' \in G_2$  tels que

$$ag = g'a'$$

Posons  $a' = a^g$  et  $g' = g^a$ , et considérons les applications suivantes:

$$\begin{aligned} \chi : G_2 \times G_1 &\longrightarrow G_1, & \sigma : G_2 \times G_1 &\longrightarrow G_2 \\ (a, g) &\longrightarrow g^a & (a, g) &\longrightarrow a^g \end{aligned}$$

On a le résultat suivant:

**Théorème 1.** Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double; soient  $g, h \in G_1$  et  $a, b, c \in G_2$ . Alors on a les identités suivantes:

- (1)  $(gh)^a = g^a h^{a^g}$
- (2)  $(a^g)^h = a^{gh}$
- (3)  $(g^b)^a \alpha(a^{g^b}, b^g) = \alpha(a, b) g^{m(a, b)}$
- (4)  $[m(a, b)]^g = m(a^{g^b}, b^g)$
- (5)  $\alpha(a, b) \alpha(m(a, b), c) = [\alpha(b, c)]^a \alpha(a^{\alpha(b, c)}, m(b, c))$
- (6)  $m(m(a, b), c) = m(a^{\alpha(b, c)}, m(b, c))$

Inversement si  $G_1$  est un groupe de Lie agissant à droite par  $\sigma$  sur une boucle de Lie mono-alternative à droite  $G_2$  dont la loi est définie par  $m : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_2$  et s'il existe deux applications analytiques  $\alpha : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_1$  et  $\chi : G_2 \times G_1 \longrightarrow G_1$  tels que les conditions (1)-(6) soient vérifiées, alors il existe une structure de groupe de Lie sur  $G_1 \times G_2$  telle que  $(G_1 \times G_2, G_1, G_2)$  définisse un groupe de Lie quasi-double.

**Démonstration :** Pour la première partie, la démonstration des identités (1)-(6) est une conséquence directe de l'associativité et de l'unicité de la décomposition du produit dans  $G$ .

Pour la seconde partie, on définit la structure de groupe de Lie sur  $G_1 \times G_2$  par :

$$(g, a)(h, b) = (gh^a \alpha(a^h, b), m(a^h, b)), \forall g, h \in G_1, \forall a, b \in G_2.$$

Il suffit de vérifier l'associativité du produit ainsi défini sur  $G_1 \times G_2$ , qui est une conséquence des conditions (1)-(6).  $\square$

**Remarque :** La condition (2) signifie que  $\sigma$  définit une action à droite du groupe de Lie  $G_1$  sur la variété  $G_2$ , tandis que la condition (3) signifie que  $G_2$  agit à gauche par  $\chi$  sur  $G_1$  mais que  $\chi$  n'est pas une vraie action à gauche, le défaut d'action étant mesuré par l'application  $\alpha$ ; dans la suite, nous appellerons une telle application  $\chi$  une **action  $\alpha$ -twistée**. Si  $\alpha(a, b) = e, \forall a, b \in G_2$ , alors  $G_2$  est un groupe de Lie et  $\chi$  devient une action à gauche de  $G_2$  sur la variété  $G_1$ .

**Corollaire 1.** Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double. Alors  $\forall a, b, c \in G_2$ , on a :

- (1)  $\lambda_{m(a, b)}(c) = (\lambda_{\sigma(a, \alpha(b, c))} \circ \lambda_b)(c),$
- (2)  $\rho_{m(a, b)}(c) = (\rho_b \circ \rho_a)(\sigma(c, \alpha(a, b)^{-1})),$
- (3)  $(\rho_b \circ \lambda_a)(c) = (\lambda_{\sigma(a, \alpha(c, b))} \circ \rho_b)(c).$

Ces différentes relations découlent de la relation (6) du théorème précédent. Si  $\alpha(a, b) = e, \forall a, b \in G_2$ , alors  $G_2$  est un groupe de Lie et on retrouve les identités traditionnelles sur les translations à gauche et à droite dans un groupe de Lie.

**Exemple 2.** *Le triplet  $(SL(n, \mathbb{C}), SU(n), SH(n))$ , où  $SH(n)$  est l'ensemble des matrices hermitiennes  $n \times n$  définies positives de déterminant 1, est un groupe de Lie quasi-double. Les applications  $\alpha$  et  $m$  sur  $SH(n)$  sont définies respectivement par*

$$\alpha(a, b) = (ab)(ba^2b)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad m(a, b) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}} \quad \forall a, b \in SH(n).$$

Définissons à présent la notion correspondante pour les algèbres de Lie en établissant une relation entre les deux notions.

**Définition 5.** *Une algèbre de Lie quasi-double est un triplet  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$  où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie,  $\mathfrak{g}_1$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_2$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  muni de deux opérations bilinéaires antisymétriques*

$$\psi : \Lambda^2 \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \quad \text{et} \quad \mu : \Lambda^2 \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

*tels que*

- (1)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  comme somme directe de sous-espaces vectoriels;
- (2)  $[x, y]_{\mathfrak{g}} = \psi(x, y) + \mu(x, y)$ ,  $\forall x, y \in \mathfrak{g}_2$ .

En un mot, une algèbre de Lie quasi-double est juste une algèbre de Lie qui se décompose en somme directe d'une sous-algèbre de Lie et d'un sous-espace vectoriel.

**Remarque :** Si  $\psi(x, y) = 0, \forall x, y \in \mathfrak{g}_2$ , alors  $\mathfrak{g}_2$  est aussi une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  et le triplet  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$  définit une algèbre de Lie double au sens de [15]. Dans [1], les algèbres de Lie quasi-doubles  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$  telles que  $\mathfrak{g}$  est munie d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée par rapport à laquelle  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont des sous-espaces isotropiques maximaux de  $\mathfrak{g}$ , sont appelées des quasi-triples de Manin.

**Exemple 3.** *Le triplet  $(sl(n, \mathbb{C}), su(n), sh(n))$ , où  $sl(n, \mathbb{C})$  est l'algèbre de Lie des matrices complexes  $n \times n$  de trace nulle,  $su(n)$  l'algèbre de Lie des matrices anti-hermitiennes  $n \times n$  de trace nulle et  $sh(n)$  l'espace vectoriel des matrices hermitiennes  $n \times n$  de trace nulle, est une algèbre de Lie quasi-double. Ici,  $\psi$  est la restriction à  $sh(n)$  du crochet de Lie de  $sl(n, \mathbb{C})$ , qui est à valeurs dans  $su(n)$  et  $\mu = 0$ .*

Plus généralement, la décomposition de Cartan [9] de toute algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie, fournit une structure d'algèbre de Lie quasi-double.

Le résultat suivant établit une correspondance entre les groupes de Lie quasi-doubles locaux et les algèbres de Lie quasi-doubles.

**Théorème 2.** *Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double local; soient  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $G_1$  respectivement, et soit  $\mathfrak{g}_2 = T_e G_2$  l'espace tangent à  $G_2$  en l'identité. Alors  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$  est une algèbre de Lie quasi-double.*

*Inversement, à toute algèbre de Lie quasi-double, il correspond un unique groupe de Lie quasi-double local (à isomorphisme près), dont l'algèbre de Lie quasi-double est celle de départ.*

**Démonstration :** Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double local; soient  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $G_1$  respectivement, et soit  $\mathfrak{g}_2 = T_\varepsilon G_2$ ; il est clair que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . Pour la conclusion, il suffit de prendre pour  $\psi$  le crochet commutateur associé à  $\alpha$  et pour  $\mu$  le crochet commutateur associé à  $m$ .

Pour la seconde partie, considérons une algèbre de Lie quasi-double  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$  et soient  $G, G_1$  les groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondant à  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_1$  respectivement. Soit  $\Pi : G \longrightarrow G_1 \setminus G$  la projection naturelle de  $G$  dans l'espace  $G_1 \setminus G$  des classes à droite et  $\phi$  la restriction à  $\mathfrak{g}_2$  de l'application composée  $\Pi \circ \exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G_1 \setminus G$ . Alors  $\phi$  est un difféomorphisme d'un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathfrak{g}_2$  dans un voisinage de la classe  $\Pi(e)$  dans  $G_1 \setminus G$  [9]. Posons  $G_2 = \exp V$  et introduisons sur  $G_2$  une loi de composition interne définie par :

$$m(a, b) = \Pi_{G_2}(ab)$$

$\forall a, b \in G_2$ , où  $ab$  est le produit dans  $G$  des éléments  $a$  et  $b$  et  $\Pi_{G_2}$  est la projection locale sur  $G_2$  parallèlement à  $G_1$ , i.e, dans la décomposition locale  $d = ga \in G$ ,  $g \in G_1$  et  $a \in G_2$ . Alors  $(G_2, m)$  est une boucle de Lie locale mono-alternative à droite [18]. En effet, par définition de  $m$ , on a

$$m(m(a, b^k), b^l) = \Pi_{G_2}(\Pi_{G_2}(ab^k)b^l) = \Pi_{G_2}((ab^k)b^l) = \Pi_{G_2}(ab^{k+l})$$

et comme pour  $b$  suffisamment proche de  $\varepsilon$  dans  $G_2$  on a  $b^{k+l} \in G_2$ , alors

$$m(a, m(b^k, b^l)) = \Pi_{G_2}(a \Pi_{G_2}(b^k b^l)) = \Pi_{G_2}(ab^{k+l}) = m(a, b^{k+l}).$$

Par conséquent

$$m(m(a, b^k), b^l) = m(a, b^{k+l})$$

Ainsi  $(G_2, m)$  est une boucle de Lie locale mono-alternative à droite. D'après [18], cette boucle de Lie locale mono-alternative à droite est unique à isomorphisme près.

Posons  $\alpha(a, b) = \Pi_{G_1}(ab)$ ; de la décomposition locale des éléments de  $G$ , il résulte que l'application  $\omega : G_1 \times G_2 \longrightarrow G$  définie par  $(g, a) \longrightarrow ga$  est un difféomorphisme local et que  $(ab)_G = \alpha(a, b)m(a, b)$ ,  $\forall a, b \in G_2$ . En définitive  $(G, G_1, G_2)$  est un groupe de Lie quasi-double local. D'où le résultat.  $\square$

Comme pour les groupes de Lie quasi-doubles, nous allons montrer que pour toute algèbre de Lie quasi-double donnée  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ , il existe deux applications correspondant à  $\chi$  et  $\sigma$ . En effet si  $\xi \in \mathfrak{g}_1$  et  $x \in \mathfrak{g}_2$ , alors  $[x, \xi]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$ ; par conséquent il existe  $\xi' \in \mathfrak{g}_1$  et  $x' \in \mathfrak{g}_2$  tels que

$$[x, \xi] = \xi' + x'.$$

Posons  $\xi' = \xi^x$  et  $x' = x^\xi$ , et considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_1, \\ (x, \xi) & \longrightarrow & \xi^x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_2 \\ (x, \xi) & \longrightarrow & x^\xi \end{array}$$

On a le résultat suivant



**Théorème 3.** *Soit  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$  une algèbre de Lie quasi-double. Soient  $\xi, \eta \in \mathbf{g}_1$ ,  $x, y, z \in \mathbf{g}_2$ . Alors on a les identités suivantes :*

- (1)  $[\xi, \eta]^x = [\xi^x, \eta] + [\xi, \eta^x] - (\xi)^{x^\eta} + (\eta)^{x^\xi}$
- (2)  $x^{[\xi, \eta]} = (x^\xi)^\eta - (x^\eta)^\xi$
- (3)  $\mu(x, y)^\xi = \mu(x^\xi, y) + \mu(x, y^\xi) + (x)^{\xi^y} - (y)^{\xi^x}$
- (4)  $\xi^{\mu(x, y)} = (\xi^y)^x - (\xi^x)^y + [\xi, \psi(x, y)] + \psi(x^\xi, y) + \psi(x, y^\xi)$
- (5)  $\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x, y), z) = \sum_{\bigcirc} x^{\psi(y, z)}$
- (6)  $\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x, y), z) = \sum_{\bigcirc} \psi(x, y)^z$

Inversement si  $\mathbf{g}_1$  est une algèbre de Lie agissant sur un espace vectoriel  $\mathbf{g}_2$  par  $(x, \xi) \longrightarrow x^\xi$ ,  $\mathbf{g}_2$  muni de deux applications bilinéaires antisymétriques  $\mu : \Lambda^2 \mathbf{g}_2 \longrightarrow \mathbf{g}_2$  et  $\psi : \Lambda^2 \mathbf{g}_2 \longrightarrow \mathbf{g}_1$ , et s'il existe une application de  $\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_1$  dans  $\mathbf{g}_1$  définie par  $(x, \xi) \longrightarrow \xi^x$ , tels que les conditions (1)-(6) ci-dessus soient vraies, alors il existe une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2$  telle que  $(\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$  définisse une algèbre de Lie quasi-double.

**Démonstration :** La démonstration de la première partie du théorème est une conséquence de l'identité de Jacobi dans  $\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2$ .

Pour la seconde partie, on définit un crochet  $[\cdot, \cdot]$  sur  $\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2$  par :

$$[\xi, \eta] = [\xi, \eta]_{\mathbf{g}_1}, \forall \xi, \eta \in \mathbf{g}_1$$

$$[x, \xi] = \xi^x + x^\xi, \forall \xi \in \mathbf{g}_1, \forall x \in \mathbf{g}_2$$

$$[x, y] = \psi(x, y) + \mu(x, y), \forall x, y \in \mathbf{g}_2$$

et on vérifie l'identité de Jacobi pour le crochet ainsi défini, qui est une conséquence des conditions (1)-(6) de la première partie du théorème. Ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.** *Soit  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$  une algèbre de Lie quasi-double. Posons*

$$[x, y]_{\mathbf{g}_2} = \mu(x, y), \quad \langle x, y, z \rangle = \frac{1}{2} x^{\psi(x, y)}.$$

*Alors le triplet  $(\mathbf{g}_2, [\cdot, \cdot]_{\mathbf{g}_2}, \langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle)$  est une algèbre d'Akivis.*

La démonstration du corollaire est une interprétation de la condition (5) du théorème précédent.

Si  $(G, G_1, G_2)$  est un groupe de Lie quasi-double, localement, en appliquant la formule de Campbell-Hausdorff dans  $G$  [8], les applications  $m, \alpha, \sigma$  et  $\chi$  admettent les développements limités (d'ordre 3) suivants au voisinage de zéro :

$$m(x, y) = x + y + \frac{1}{2} \mu(x, y) + \frac{1}{12} \left( \mu(x, \mu(x, y)) + \mu(y, \mu(y, x)) + x^{\psi(x, y)} + y^{\psi(y, x)} \right) + \dots$$

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{2} \psi(x, y) + \frac{1}{12} \left( \psi(x, \mu(x, y)) + \psi(y, \mu(y, x)) + \psi(x, y)^x + \psi(y, x)^y \right) + \dots$$

$$\sigma(x, \xi) = x + \frac{1}{2} x^\xi + \frac{1}{12} \left( \mu(x, x^\xi) + (x)^{\xi^x} + (x^\xi)^\xi \right) + \dots$$

$$\chi(x, \xi) = \xi + \frac{1}{2} \xi^x + \frac{1}{12} \left( \psi(x, x^\xi) + [\xi^x, \xi] + (\xi^x)^x + (\xi)^{x^\xi} \right) + \dots$$

$\forall \xi \in \mathfrak{g}_1, \forall x, y \in \mathfrak{g}_2$ .

Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double; pour tout  $x \in T_e G_2$ , soit  $x^L$  le champ de vecteurs invariant à gauche sur  $G$  associé à  $x$ , c'est-à-dire

$$x^L(d) = (T_e L_d)(x) \in T_d G, \forall d \in G$$

et  $x^\lambda$  l'image directe par  $\Pi_{G_2}$  du champ  $x^L$ , c'est-à-dire

$$x^\lambda(\Pi_{G_2}(d)) = [T_\varepsilon(\Pi_{G_2} \circ L_d)](x) \in T_{\Pi(d)} G_2, \forall d \in G.$$

Il est clair que  $x^\lambda$  n'est pas invariant à gauche par les translations dans  $G_2$  du fait de la non associativité de  $m$ ; appelons-le le champ de vecteurs translaté à gauche sur  $G_2$  associé à  $x$ .

On a le résultat suivant

**Proposition 1.** *Soit  $(G, G_1, G_2)$  un groupe de Lie quasi-double; soit  $\rho_{G_2} : T_e G_1 \longrightarrow A^1(G_2)$ , l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action  $\sigma$  de  $G_1$  sur  $G_2$ ,  $A^1(G_2)$  étant l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur  $G_2$ . Alors pour tous  $x, y \in T_e G_2$  et pour tous  $\xi \in T_e G$ , on a*

$$x^\lambda(m(a, b)) = (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) + (\rho_b)_*(\rho_B(x^b)(a)),$$

$$\rho_B(\xi)(m(a, b)) = (\lambda_a)_*(\rho_B(\xi)(b)) + (\rho_b)_*(\rho_B(\xi^b)(a)),$$

$$[x^\lambda, y^\lambda] = \rho_{G_2}(\psi(x, y)) + (\mu(x, y))^\lambda$$

où  $x^b$  et  $\xi^b$  sont des éléments de  $T_e G$ , définis respectivement par

$$x^b = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, \text{expt}x)) \quad \text{et} \quad \xi^b = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\chi(b, \text{expt}\xi))$$

**Démonstration :** Ici, on notera  $\sigma_a(g) = \sigma(a, g)$ . Démontrons la première relation; en effet  $\forall a, b \in G_2$  et  $\forall x \in T_e G_2$ , on a:

$$\begin{aligned} x^\lambda(m(a, b)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(m(m(a, b), \text{expt}x)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(m(\sigma(a, \alpha(b, \text{expt}x)), m(b, \text{expt}x))) \\ &= (\Pi_{G_2})_*\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\sigma(a, \alpha(b, \text{expt}x)).\Pi_{G_2}(b.\text{expt}x))\right) \\ &= (\Pi_{G_2})_*\left((\sigma_a)_*\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, \text{expt}x))\right).b\right) \\ &\quad + (\Pi_{G_2})_*\left((\sigma(a, e)).\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\Pi_{G_2}(b.\text{expt}x))\right)\right) \\ &= (\Pi_{G_2} \circ R_b \circ \sigma_a)_*\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, \text{expt}x))\right) + (\Pi_{G_2} \circ L_a)_*(x^\lambda(b)) \\ &= (\rho_b \circ \sigma_a)_*\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(b, \text{expt}x))\right) + (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) \\ &= (\lambda_a)_*(x^\lambda(b)) + (\rho_b)_*(\rho_B(x^b)(a)). \end{aligned}$$

D'où le résultat; en particulier si  $\alpha(a, b) = e$ ,  $\forall a, b \in G_2$ , alors  $x^b = 0, \forall x \in T_e G_2$  et on retrouve le fait que  $x^\lambda$  est invariant à gauche sur  $G_2$  qui est dans ce cas un groupe de Lie. La démonstration de la deuxième relation est identique, et celle de la dernière découle de l'identité bien connue pour les groupes de Lie en se plaçant dans le groupe de Lie  $G$ , à savoir

$$[x^L, y^L] = [x, y]^L.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

## 4. BIGÈBRES QUASI-LIE

Les bigèbres quasi-Lie sont les objets duaux des quasi-bigèbres de Lie introduites par Drinfeld [6]. Plus précisément

**Définition 6.** Une bigèbre quasi-Lie est un quadruplet  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  où  $\mathbf{F}$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ,  $\mu : \Lambda^2 \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$ ,  $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}$ , et  $\psi \in \Lambda^3 \mathbf{F}^*$  tels que :

- (1)  $\text{Alt}(\gamma \otimes \text{Id})\gamma(x) = 0, \forall x \in \mathbf{F}$ , i.e que  $(\mathbf{F}, \gamma)$  est une co-algèbre de Lie;
- (2)  $\gamma$  est une dérivation par rapport à  $\mu$ , c'est-à-dire

$$\gamma(\mu(x, y)) = \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)), \quad \forall x, y \in T_\varepsilon B;$$

- (3)  $\text{Alt}(\mu^t \otimes \text{Id})\mu^t(\xi) = (\delta_\gamma \psi)(\xi), \forall \xi \in \mathbf{F}^*$ , où  $\mu^t$  est l'opérateur transposé de  $\mu$  et  $\delta_\gamma$  désigne l'opérateur cobord d'algèbre de Lie définie par  $\gamma$ ;
- (4)  $\text{Alt}((\mu^t \otimes \text{Id} \otimes \text{Id})\psi) = 0$ ,

où  $\text{Alt}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z + y \otimes z \otimes x + z \otimes x \otimes y$ .

**Remarques :**

- a) Dans le cas où  $\psi = 0$ , le triplet  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma)$  satisfaisant les conditions ci-dessus est une bigèbre de Lie [5, 12, 2]. Dans ce cas, la condition (2) signifie que  $\gamma$  est un 1-cocycle de  $(\mathbf{F}, \mu)$  à valeurs dans  $\Lambda^2 \mathbf{F}$  par rapport à l'action adjointe définie par  $\mu$ .
- b) Si  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  est une bigèbre quasi-Lie, alors  $(\mathbf{F}^*, \gamma, \mu, \psi)$  est une quasi-bigèbre de Lie [10, 11]. Ainsi, comme on le voit, ces deux notions sont duales l'une de l'autre et ne sont pas auto-duales.

Soit  $\mathbf{F}$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ,  $\mu : \Lambda^2 \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$ ,  $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}$ , et  $\psi \in \Lambda^3 \mathbf{F}^*$ ; en identifiant les applications  $\mu$  et  $\gamma$  à des éléments de l'algèbre extérieure de  $\mathbf{F}^* \oplus \mathbf{F}$ , à savoir  $\mu \in \Lambda^2 \mathbf{F}^* \otimes \mathbf{F}$ ,  $\gamma \in \mathbf{F}^* \otimes \Lambda^2 \mathbf{F}$ , et en utilisant les propriétés du grand crochet [11] nous avons le résultat suivant

**Proposition 2.**  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  est une bigèbre quasi-Lie si et seulement si  $\mu + \gamma + \psi$  est de carré nul par rapport au grand crochet; plus précisément si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} [\gamma, \gamma] &= 0 \\ [\gamma, \mu] &= 0 \\ \frac{1}{2}[\mu, \mu] + [\gamma, \psi] &= 0 \\ [\mu, \psi] &= 0. \end{aligned}$$

Ce formalisme est plus technique et a l'avantage de simplifier les calculs dans la théorie des bigèbres de Lie et leurs généralisations [11].

**Exemple 4.** Soit  $(\mathbf{F}, \gamma)$  une co-algèbre de Lie; soit  $\omega \in \Lambda^2 \mathbf{F}^*$  et posons

$$\begin{aligned} \mu &= \delta_\gamma(\omega) \\ \psi &= -\frac{1}{2}[\omega, \omega]^\gamma \end{aligned}$$

où  $[\cdot, \cdot]^\gamma$  désigne le crochet de Schouten algébrique [11] associé à  $\gamma$ . Alors  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  est une bigèbre de quasi-Lie.

**Exemple 5.** Considérons la décomposition polaire de l'algèbre de Lie réelle  $sl(n, \mathbb{C})$ , c'est-à-dire

$$sl(n, \mathbb{C}) = su(n) \oplus sh(n).$$

Soient  $\gamma$  le crochet de Lie sur  $su(n)$  et  $\psi$  la restriction à  $sh(n)$  du crochet de Lie de  $sl(n, \mathbb{C})$ , qui est à valeurs dans  $su(n)$ . Comme  $su(n)$  s'identifie au dual  $sh(n)^*$  de  $sh(n)$  par l'intermédiaire de la forme bilinéaire invariante non dégénérée définie sur  $sl(n, \mathbb{C})$  par

$$\langle x, y \rangle = \text{Im}(\text{trace}(xy)), \quad x, y \in sl(n, \mathbb{C}),$$

on peut identifier  $\psi$  à un élément de  $\Lambda^3 su(n) \cong \Lambda^3(sh(n))^*$ . Par conséquent  $(sh(n), 0, \gamma, \psi)$  est une bigèbre quasi-Lie.

Nous allons à présent montrer qu'à toute structure de bigèbre quasi-Lie sur un espace vectoriel donné  $\mathbf{F}$  de dimension finie, il correspond une certaine structure d'algèbre de Lie sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  et inversement [11, 3]; faisant ainsi du triplet  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$  une algèbre de Lie quasi-double.

Soit  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  une bigèbre quasi-Lie; pour plus de simplicité, désignons  $\gamma$  et sa transposée par  $\gamma$  et identifions  $\psi \in \Lambda^3 \mathbf{F}^*$  à une application bilinéaire antisymétrique notée aussi par  $\psi : \Lambda^2 \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}^*$  définie par

$$\langle \psi(x, y), z \rangle = \psi(x, y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{F}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}^*$ . Nous avons le résultat suivant ([11]):

**Théorème 4.** Le crochet  $M$  sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  défini par :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \mu(x, y) + \psi(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{F} \\ M(x, \xi) &= -ad_x^{*\gamma} x + ad_x^{*\mu} \xi, \quad \forall x \in \mathbf{F}, \forall \xi \in \mathbf{F}^* \\ M(\xi, \eta) &= \gamma(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{F}^* \end{aligned}$$

où  $ad_x^\mu y = \mu(x, y)$ ,  $ad_x^{*\mu} = -(ad_x^\mu)^t$ ,  $ad_\xi^\gamma \eta = \gamma(\xi, \eta)$  et  $ad_\xi^{*\gamma} = -(ad_\xi^\gamma)^t$ , est un crochet d'algèbre de Lie laissant invariant le produit scalaire canonique défini sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  par

$$\langle x + \xi, y + \eta \rangle = \langle \xi, y \rangle + \langle \eta, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbf{F}, \forall \xi, \eta \in \mathbf{F}^*$$

De façon plus précise, on montre dans [11], que les structures de bigèbre quasi-Lie sur un espace vectoriel  $\mathbf{F}$  sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre de Lie quasi-double sur  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$  laissant invariant le produit scalaire canonique, c'est-à-dire les structures de quasi-triple de Manin [1]. Dans [11, 3], le couple  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, M)$  est appelé le double de la bigèbre quasi-Lie  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ . Ainsi, d'après le corollaire 2, à toute structure de bigèbre quasi-Lie, il correspond une structure d'algèbre d'Akivis. Pour plus de détails sur les bigèbres quasi-Lie, voir [10, 11, 3].

## 5. QUASI-GROUPES DE LIE QUASI-POISSON

Dans cette section, nous définissons l'objet géométrique correspondant à une bigèbre quasi-Lie, puis nous établissons un résultat liant les deux notions.

**Définition 7.** *Un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson est un ensemble  $(B, m, -G, \sigma, P, \alpha, \chi, < ., . >)$  où  $(B, m)$  est une boucle de Lie mono-alternative à droite,  $G$  un groupe de Lie agissant à droite sur  $B$  par  $\sigma : B \times G \longrightarrow B$ ,  $P$  un champ de bivecteurs s'annulant en l'identité de  $B$ ,  $\alpha : B \times B \longrightarrow G$  une application analytique,  $\chi : B \times G \longrightarrow G$  une action à gauche  $\alpha$ -twistée de  $B$  sur  $G$  et  $< ., . > : T_e G \times T_e B \longrightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire invariante non dégénérée tels que*

- (1)  $m(m(a, b), c) = m(\sigma(a, \alpha(b, c)), m(b, c)), \forall a, b, c \in B;$
- (2)  $\alpha(a, b)\alpha(m(a, b), c) = \chi(a, \alpha(b, c))\alpha(\sigma(a, \alpha(b, c)), m(b, c)), \forall a, b, c \in B;$
- (3)  $\frac{1}{2}[P, P]_S = -(\Lambda^3 \rho_B)(\psi)$ , où  $[., .]_S$  désigne le crochet de Schouten des champs de multivecteurs [13, 11],  $\rho_B : T_e G \longrightarrow A^1(B)$  l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action  $\sigma$  et  $\psi$  le crochet commutateur associé à  $\alpha$ ;
- (4)  $L_{x^\lambda} P = [(L_{x^\lambda} P)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), \forall x \in T_e B$ , où  $x^\lambda$  désigne le champ de vecteurs translaté à gauche correspondant à  $x$ .

**Remarques :**

- 1) Si  $\alpha(a, b) = e, \forall a, b \in B$  (donc  $\psi = 0$ ), alors  $(B, m)$  est un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson; si en plus  $B$  est connexe, la condition (4) de la définition ci-dessus ( $\psi = 0$ ) est équivalente à la multiplicativité [15, 14, 11] de  $P$  car  $P(\varepsilon) = 0$ , et donc  $(B, m, P)$  est un groupe de Lie-Poisson.
- 2) L'invariance de  $< ., . >$  signifie que  $\forall \xi, \eta \in T_e G, \forall x, y \in T_e B$ , on a :
  - a)  $< \xi, \mu(x, y) > = < \xi^y, x >$ ,  $\mu$  étant le commutateur associé à  $m$ ;
  - b)  $< [\xi, \eta], x > = < \eta, x^\xi >$  où  $[., .]$  est le crochet de Lie sur  $T_e G$ ;
  - c)  $< \psi(x, y), z > = < \psi(y, z), x >$ .
- 3) La non dégénérescence de  $< ., . >$  identifie  $T_e G$  avec le dual  $(T_e B)^*$  de  $(T_e B)$ ; d'où, de la remarque 2),  $\psi \in \Lambda^3(T_e B)^* \cong \Lambda^3 T_e G$ ;
- 4) Par définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson,  $P$  n'est pas en général Poisson, mais il définit un crochet de Poisson sur l'espace  $C^\infty(B)^G$  des fonctions  $G$ -invariantes définies sur  $B$  [1].

On a le résultat suivant

**Proposition 3.** *Soit  $(B, m, G, \sigma, P, \alpha, \chi, < ., . >)$  un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson (local); posons  $\gamma(x) = (L_{x^\lambda} P)(\varepsilon), \forall x \in T_e B$ . Alors l'application  $\gamma : T_e B \longrightarrow \Lambda^2(T_e B)$  satisfait les propriétés suivantes :*

- (1)  $\gamma^2 = 0$ ;
- (2)  $\gamma(\mu(x, y)) = \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)), \quad \forall x, y \in T_e B,$

où  $\mu$  est le crochet associée à  $m$ , et  $\gamma^2(x) = (\gamma \otimes Id + Id \otimes \gamma)(\gamma(x))$ .

**Démonstration :** 1) En utilisant l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten, on obtient

$$\begin{aligned}
[x^\lambda, [P, P]] &= 2[[x^\lambda, P], P] \\
&= 2[\gamma(x)^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P] \\
&= 2([\gamma^2(x)]^\lambda - (\Lambda^3 \rho_B)(\psi(\gamma(x))) \\
&\quad - [(\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P]), \forall x \in T_\varepsilon B.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, de la condition (3) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson, on a

$$\begin{aligned}
[x^\lambda, [P, P]](\varepsilon) &= -2[x^\lambda, \Lambda^3 \rho_B(\psi)](\varepsilon) = -2(L_{x^\lambda} \Lambda^3 \rho_B(\psi))(\varepsilon) \\
&= -2 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\Lambda^3 \rho_B(\psi)(\exp tx)) \exp(-tx)) \\
&= -2 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\Lambda^3 (\rho_{\exp(-tx)} \circ \sigma_{\exp tx}))_*(\psi))
\end{aligned}$$

où  $\sigma_a(g) = \sigma(a, g), \forall a \in B, \forall g \in G$ . Comme  $\psi \in \Lambda^3(T_\varepsilon B)^*$  et  $(\sigma_\varepsilon)_* = 0$ , la règle de dérivation de la composition des applications prouve que  $[x^\lambda, [P, P]](\varepsilon) = 0$ .

Ainsi, en évaluant l'égalité

$$[x^\lambda, [P, P]] = 2([\gamma^2(x)]^\lambda - (\Lambda^3 \rho_B)(\psi(\gamma(x))) - [(\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)), P])$$

en l'identité, sachant que  $P(\varepsilon) = 0$  et  $\rho_B$  s'annule en l'identité, on trouve  $\gamma^2(x) = 0, \forall x \in T_\varepsilon B$ ; d'où  $\gamma^2 = 0$ .

2) En utilisant la relation (4) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson et la relation  $[x^\lambda, y^\lambda] = \rho_B(\psi(x, y)) + (\mu(x, y))^\lambda$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu(x, y)) &= (L_{\mu(x, y)^\lambda} P)(\varepsilon) \\
&= (L_{[x^\lambda, y^\lambda]} P)(\varepsilon) - (L_{\rho_B(\psi(x, y))} P)(\varepsilon) \\
&= (L_{x^\lambda} L_{y^\lambda} P)(\varepsilon) - (L_{y^\lambda} L_{x^\lambda} P)(\varepsilon) \\
&= [x^\lambda, [y^\lambda, P]](\varepsilon) - [y^\lambda, [x^\lambda, P]](\varepsilon) \\
&= [x^\lambda, \gamma(y)^\lambda](\varepsilon) - [x^\lambda, (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(y))](\varepsilon) \\
&\quad - [y^\lambda, \gamma(x)^\lambda](\varepsilon) + [y^\lambda, (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x))](\varepsilon) \\
&= \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)).
\end{aligned}$$

D'où

$$\gamma(\mu(x, y)) = \mu(\gamma(x), y) + \mu(x, \gamma(y)), \quad \forall x, y \in T_\varepsilon B.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**Remarques :** La relation  $\gamma^2 = 0$  signifie que la linéarisation de  $P$  [19] en l'identité de  $B$  est un co-crochet de Lie sur  $T_\varepsilon B$  ou encore un crochet de Lie sur  $(T_\varepsilon B)^* \cong T_e G$  qu'on va identifier avec le crochet de Lie de  $T_e G$ . Ainsi l'invariance de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  prouve que

$$\xi^x = ad_x^{*\mu} \xi, \quad x^\xi = -ad_\xi^{*\gamma} x$$

La relation (2) de la proposition exprime le fait que  $\gamma$  est une dérivation par rapport à  $\mu$ . En termes de grand crochet, les deux relations s'écrivent respectivement comme suit

$$\begin{aligned}
[\gamma, \gamma] &= 0 \\
[\gamma, \mu] &= [\mu, \gamma] = 0.
\end{aligned}$$

Le résultat suivant établit une correspondance entre les quasi-groupes de Lie quasi-Poisson locaux et les bigèbres quasi-Lie.

**Théorème 5.** *L'espace tangent en l'identité à tout quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local  $(B, m, G, \sigma, P, \alpha, \chi, < \cdot, \cdot >)$  est muni d'une structure de bigèbre quasi-Lie  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ , où  $\mathbf{F} = T_\varepsilon B$ ,  $\mu$  le crochet commutateur défini à partir de la loi de composition  $m$ ,  $\gamma = d_\varepsilon P$  la linéarisation de  $P$  en l'identité et  $\psi$  le crochet commutateur associé à l'application  $\alpha$ .*

*Inversement, à toute bigèbre quasi-Lie réelle  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ , il correspond un unique quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local (à isomorphisme près) dont la bigèbre quasi-Lie tangente coïncide avec la bigèbre quasi-Lie donnée.*

**Démonstration :** Soit  $(B, m, G, \sigma, P, \alpha, \chi, < \cdot, \cdot >)$  un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local. Soit  $\mathbf{F} = T_\varepsilon B$ ; soient  $\mu$  et  $\psi$  les crochets commutateurs associés à  $m$  et  $\alpha$  respectivement. Comme  $P(\varepsilon) = 0$ , on peut considérer la linéarisation de  $P$  en  $\varepsilon$  et désignons-la par  $\gamma$ . D'après la proposition 3,  $\gamma$  est un co-crochet de Lie sur  $\mathbf{F}$  et une dérivation par rapport à  $\mu$ . Considérons à présent la relation

$$m(m(a, b), c) = m(\sigma(a, \alpha(b, c)), m(b, c)), \forall a, b, c \in B.$$

Alors en effectuant localement un développement limité d'ordre 3 au voisinage de zéro des deux membres de cette égalité, on obtient pour tous  $x, y, z \in \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} & 3\mu(\mu(x, y), z) + \mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(x, z)) + y^{\psi(x, z)} + x^{\psi(y, z)} - 3z^{\psi(x, y)} = \\ & = 3\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(x, z)) + \mu(z, \mu(y, x)) + y^{\psi(z, x)} + 3x^{\psi(y, z)} + z^{\psi(y, x)} \end{aligned}$$

En utilisant l'antisymétrie des applications  $\mu$  et  $\psi$ , on obtient

$$\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x, y), z) = \sum_{\bigcirc} x^{\psi(y, z)}.$$

Mais l'invariance de  $< \cdot, \cdot >$  prouve que

$$x^{\psi(y, z)} = -ad_{\psi(y, z)}^{*\gamma} x;$$

d'où

$$\sum_{\bigcirc} \mu(\mu(x, y), z) = - \sum_{\bigcirc} ad_{\psi(y, z)}^{*\gamma} x, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

Par transposition, on trouve que cette égalité est équivalente à

$$Alt(\mu^t \otimes Id)\mu^t(\xi) = (\delta_\gamma \psi)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbf{F}^*.$$

Enfin considérons la relation

$$\alpha(a, b)\alpha(m(a, b), c) = \chi(a, \alpha(b, c))\alpha(\sigma(a, \alpha(b, c)), m(b, c)), \forall a, b, c \in B;$$

comme précédemment, en effectuant localement un développement limité d'ordre 3 au voisinage de zéro des deux membres de cette égalité, on obtient

$$\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x, y), z) = \sum_{\bigcirc} \psi(y, z)^x, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

L'invariance de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  prouve que

$$\psi(y, z)^x = ad_x^{*\mu} \psi(y, z);$$

d'où

$$\sum_{\bigcirc} \psi(\mu(x, y), z) = \sum_{\bigcirc} ad_x^{*\mu} \psi(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

Par transposition, on trouve que cette dernière égalité est équivalente à

$$Alt((\mu^t \otimes Id \otimes Id)\psi) = 0.$$

En définitive,  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  est une bigèbre quasi-Lie.

Inversement soit  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  une bigèbre quasi-Lie; d'après le théorème 4, il lui correspond une structure d'algèbre de Lie quasi-double sur  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$  laissant invariant le produit scalaire canonique. Soit  $(D, G, B)$  le groupe de Lie quasi-double local correspondant à  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{F})$  comme décrit par le théorème 2.  $\forall a, b \in B, \forall g \in G$  posons

$$m(a, b) = \Pi_B(ab), \alpha(a, b) = \Pi_G(ab), \sigma(a, g) = \Pi_B(ag), \chi(a, g) = \Pi_G(ag).$$

Il est clair que  $\sigma$  est une action de  $G$  sur  $B$  et  $\chi$  est une action  $\alpha$ -twistée. De la relation d'associativité dans  $D$ ,  $(a(bc)_D)_D = ((ab)_D c)_D, \forall a, b, c \in B$ , on obtient les relations (1) et (2) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson.

Par ailleurs, d'après [11], par la donnée de la bigèbre de quasi-Lie  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$ ,  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  est munie d'une structure de quasi-bigèbre de Lie quasitriangulaire  $(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*, M, \Gamma, \psi)$ , où  $M$  est la structure d'algèbre de Lie sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  décrite par le théorème 4,  $\Gamma$  est un co-crochet sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  défini par  $\Gamma = \gamma - \mu^t - \psi$ ; explicitement

$$\Gamma(x, \xi) = \gamma(x) - \mu^t(\xi) - \psi(x) \in \Lambda^2(\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*)$$

où  $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}, \mu^t : \mathbf{F}^* \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}^*$  (transposition),  $\psi : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}^*$ .

De la théorie des quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson [11], on sait que cette structure sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$  s'intègre en une structure de groupe de Lie quasi-Poisson sur  $D$  notée par  $(D, P, \psi)$ , où

- $P$  est un champ de bivecteurs multiplicatif [15, 14, 11] sur le groupe de Lie  $D$ , c'est-à-dire  $P(gh) = (L_g)_* P(h) + (R_h)_* P(g), \forall g, h \in D$ ;
- $\frac{1}{2}[P, P]_S = \psi^R - \psi^L$ , où  $\psi^L$  (respectivement  $\psi^R$ ) désigne le champ de trivecteurs invariant à gauche (respectivement à droite) sur  $D$  associé à  $\psi$ ;
- $[P, \psi^L]_S = [P, \psi^R]_S = 0$ .

Considérons à présent l'image directe par  $\Pi_B : D \longrightarrow B$  du champ de bivecteurs  $P$  et notons-la par  $P_B$ , c'est-à-dire

$$P_B(\Pi_B(d)) = (\Lambda^2 T_d \Pi_B)(P(d)), \quad \forall d \in D.$$

$P_B$  est bien un champ de bivecteurs défini sur  $B$  avec  $P_B(\varepsilon) = 0$  où  $\varepsilon = \Pi_B(e)$ , à cause du caractère multiplicatif de  $P$ . Par ailleurs, prenant l'image directe par  $\Pi_B$  des deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{2}[P, P]_S = \psi^R - \psi^L,$$



on obtient

$$\frac{1}{2}[P_B, P_B]_S = (\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^R) - (\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^L).$$

Mais  $(\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^R) = 0$  car  $\psi \in \Lambda^3(T_\varepsilon B)^*$  et  $\Pi_B \circ R_a = \rho_a \circ \Pi_B$  par construction de la structure du groupe de Lie quasi-double  $(D, G, B)$ ; d'autre part

$$(\Lambda^3(\Pi_B)_*)(\psi^L) = (\Lambda^3 \rho_B)(\psi).$$

D'où

$$\frac{1}{2}[P_B, P_B]_S = -(\Lambda^3 \rho_B)(\psi).$$

Enfin, comme  $D$  est connexe, la multiplicativité de  $P$  est équivalente à la relation

$$L_{X^L} P = [(L_{X^L} P)(e)]^L, \forall X \in T_e D = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*,$$

où  $X^L$  désigne le champ de vecteurs invariant à gauche sur  $D$  associé à  $X$ .

Mais  $(L_{X^L} P)(e) = \Gamma(X) = (\gamma - \mu^t - \psi)(X), \forall X \in T_e D = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ .

Considérons la relation ci-dessus avec  $X = x \in \mathbf{F}$ , c'est-à-dire

$$L_{x^L} P = [\Gamma(x)]^L = [\gamma(x) - \psi(x)]^L;$$

comme  $\psi(x) \in \Lambda^2 \mathbf{F}^*$ , en prenant l'image directe par  $\Pi_B$  des deux membres de cette égalité, on obtient

$$L_{x^\lambda} P_B = [\gamma(x)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)) = [(L_{x^\lambda} P_B)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_B)(\psi(x)).$$

Pour la forme bilinéaire invariante non dégénérée, il suffit de prendre pour  $\langle ., . \rangle$  la restriction à  $\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*$  du produit scalaire canonique défini sur  $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*$ .

En définitive,  $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, \langle ., . \rangle)$  est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local dont la bigèbre quasi-Lie tangente est bien celle de départ. Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Corollaire 3.** *Soit  $(\mathbf{F}, \mu, \gamma, \psi)$  une bigèbre de quasi-Lie et soit  $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, \langle ., . \rangle)$  le quasi-groupe de Lie quasi-Poisson local correspondant comme décrit par le théorème précédent. Alors le champ de bivecteurs  $P_B$  sur  $B$  satisfait la relation*

$$L_{\rho_B(\xi)} P_B = -(\Lambda^2 \rho_B)(\mu^t(\xi)), \quad \forall \xi \in T_e G.$$

**Démonstration :** En effet, par définition

$$P_B(\Pi_B(d)) = (\Lambda^2 T_d \Pi_B)(P(d)), \quad \forall d \in D.$$

D'après le théorème précédent,  $P$  satisfait la relation

$$L_{X^L} P = [\Gamma(X)]^L, \forall X \in T_e D = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^*,$$

où  $X^L$  désigne le champ de vecteurs invariant à gauche sur  $D$  associé à  $X$  et  $\Gamma(X) = (\gamma - \mu^t - \psi)(X)$ .

Pour  $X = \xi \in T_e G = (T_\varepsilon B)^*$ , prenant l'image directe par  $\Pi_B$  des deux membres de la relation précédente sachant que  $(\Pi_B)_*(\xi^L) = \rho_B(\xi)$ ,  $\mu^t(\xi) \in \Lambda^2 T_e G$ ,  $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}$ , et  $\psi : \mathbf{F} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbf{F}^*$ , on obtient la relation anoncée.  $\square$

**Remarques :**

a) Si  $\alpha(a, b) = e$ ,  $\forall a, b \in B$  et si le groupe de Lie  $G$  est connexe, la relation énoncée dans le corollaire précédent traduit de manière équivalente le fait que  $\sigma$  est une action de Poisson [15].

b) Dans [1, 4], le couple  $(B, P_B)$  vérifiant la condition (3) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson et la relation énoncée dans le corollaire précédent, est appelé un  $G$ -espace quasi-Poisson, où  $G$  est muni de sa structure de groupe de Lie quasi-Poisson induite par celle de  $D$ . Dans [1], une construction similaire du champ de bivecteurs  $P_B$  est donnée sur l'ensemble  $D/G$  des classes à gauche, et l'action de  $G$  sur  $D/G$  est une action à gauche; d'où l'apparition de différences de signes par rapport à la nôtre, notamment dans l'expression de  $P_B$  et de son carré par rapport au crochet de Schouten.

**Exemple 6.** *Tout groupe de Lie-Poisson  $(G, P)$  est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson; il suffit de considérer son groupe de Lie-Poisson dual  $G^*$  avec lequel ils agissent l'un sur l'autre [15] et de prendre  $\psi = 0$ .*

**Exemple 7.** *Considérons la décomposition polaire du groupe de Lie réel  $SL(2, \mathbb{C})$  des matrices complexes  $2 \times 2$  de déterminant 1,*

$$SL(2, \mathbb{C}) = SU(2) \times SH(2),$$

où  $SH(2)$  est l'ensemble des matrices hermitiennes  $2 \times 2$  définies positives de déterminant 1 et  $SU(2)$  le groupe spécial unitaire d'ordre 2. Soit

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

la base canonique de  $sh(2)$ , l'espace tangent à  $SH(2)$  en l'identité, et

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

la base duale de  $su(2)$  relativement à la forme bilinéaire

$$\langle x, \xi \rangle = \text{Im}(\text{trace}(x\xi)), \quad \forall x \in sh(2), \forall \xi \in su(2).$$

Par rapport au crochet de Lie de  $sl(2, \mathbb{C})$ , nous avons les relations de commutation suivantes dans les deux bases

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\sqrt{2}\varepsilon_3, & [e_1, e_3] &= \sqrt{2}\varepsilon_2, & [e_2, e_3] &= -\sqrt{2}\varepsilon_1 \\ [\varepsilon_1, \varepsilon_2] &= \sqrt{2}\varepsilon_3, & [\varepsilon_1, \varepsilon_3] &= -\sqrt{2}\varepsilon_2, & [\varepsilon_2, \varepsilon_3] &= \sqrt{2}\varepsilon_1 \\ [e_1, \varepsilon_2] &= \sqrt{2}e_3, & [e_1, \varepsilon_3] &= -\sqrt{2}e_2, & [e_2, \varepsilon_1] &= -\sqrt{2}e_3, \\ [e_2, \varepsilon_3] &= \sqrt{2}e_1, & [e_3, \varepsilon_1] &= \sqrt{2}e_2, & [e_3, \varepsilon_2] &= -\sqrt{2}e_1, \\ [e_i, \varepsilon_i] &= 0, & & & \forall i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Pour tous  $a, b \in SH(2)$  et tous  $g \in SU(2)$ , posons

$$\begin{aligned} m(a, b) &= \Pi_{SH(2)}(ab) = (ba^2b)^{\frac{1}{2}}, & \alpha(a, b) &= \Pi_{SU(2)}(ab) = (ab)(ba^2b)^{-\frac{1}{2}}, \\ \sigma(a, g) &= \Pi_{SH(2)}(ag) = (g^{-1}a^2g)^{\frac{1}{2}}, & \chi(a, g) &= \Pi_{SU(2)}(ag) = (ag)(g^{-1}a^2g)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Considérons le champ de bivecteurs sur  $SH(2)$  défini par

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_i^\lambda \wedge \rho_{SH(2)}(\varepsilon_i),$$

où  $e_i^\lambda$  est le champ de vecteurs translaté à gauche (par rapport à la loi  $m$ ) associé à  $e_i$  et  $\rho_{SH(2)}$  est l'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à  $\sigma$ , l'action de  $SU(2)$  sur  $SH(2)$ .

Alors  $(SH(2), m, SU(2), \sigma, P, \alpha, \chi, < \cdot, \cdot >)$  est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson dont la bigèbre quasi-Lie tangente est  $(sh(2), 0, \gamma, \psi)$ , où  $\gamma$  est le crochet de Lie sur  $su(2)$  et  $\psi$  la restriction du crochet de  $sl(2, \mathbb{C})$  aux éléments de  $sh(2)$ . Le groupe de Lie quasi-Poisson dual est  $(SU(2), 0, \psi)$ .

En effet, les conditions (1) et (2) de la définition d'un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson sont évidentes, elles s'obtiennent par un calcul direct simple utilisant les définitions des différentes applications; il est clair aussi que  $P(\varepsilon) = 0$  par définition de  $P$ . Par ailleurs, les calculs utilisant les relations de commutation entre les éléments des deux bases, montrent que

$$\frac{1}{2}[P, P]_S = -(\Lambda^3 \rho_{SH(2)})(\psi) = 0,$$

où  $\psi$  considéré comme élément de  $\Lambda^3 su(2) \cong \Lambda^3(sh(2))^*$  est égal à  $-\sqrt{2}(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)$  d'après les relations de commutation; ce qui nous donne la condition (3) de la définition. Vérifions à présent la condition (4); en effet par un calcul direct utilisant les relations de commutation ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} L_{e_1^\lambda} P &= \sqrt{2}(e_2 \wedge e_3)^\lambda + \sqrt{2}(\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) \\ &= [(L_{e_1^\lambda} P)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\psi(e_1)) \\ L_{e_2^\lambda} P &= -\sqrt{2}(e_1 \wedge e_3)^\lambda - \sqrt{2}(\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3) \\ &= [(L_{e_2^\lambda} P)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\psi(e_2)) \\ L_{e_3^\lambda} P &= \sqrt{2}(e_1 \wedge e_2)^\lambda + \sqrt{2}(\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \\ &= [(L_{e_3^\lambda} P)(\varepsilon)]^\lambda - (\Lambda^2 \rho_{SH(2)})(\psi(e_3)). \end{aligned}$$

En définitive,  $(SH(2), m, SU(2), \sigma, P, \alpha, \chi, < \cdot, \cdot >)$  est un quasi-groupe de Lie quasi-Poisson.

**Remarque :** Dans cet exemple,  $P$  est Poisson mais n'est pas multiplicatif au sens de [15, 14, 11], car  $\alpha(a, b)$  n'est pas la matrice identité d'ordre 2 pour tous  $a, b \in SH(2)$ ; une telle structure définit un quasi-groupe de Lie-Poisson. Plus généralement, si  $(\Lambda^3 \rho_B)(\psi) = 0$  avec  $\psi \neq 0$ , on dit que  $(B, m, G, \sigma, P_B, \alpha, \chi, < \cdot, \cdot >)$  est un quasi-groupe de Lie-Poisson. La construction de la structure définie ci-dessus sur  $SH(2)$  s'étend naturellement à  $SH(n)$  pour  $n \geq 3$ .

**Remerciements :** L'auteur remercie sincèrement Madame le Professeur Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses remarques et suggestions sur le contenu

du travail. Les remerciements vont également à la Section Mathématiques de Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP, Trieste, Italie) pour l'hospitalité et le soutien financier, sans lesquels la réalisation du présent document n'aurait pas été possible. Enfin, l'auteur remercie le Réseau Africain de Géométrie et d'Algèbre Appliquées au Développement (RAGAAD) pour avoir financé son voyage à travers CIMPA/SARIMA.

## REFERENCES

- [1] A. Alekseev and Y. Kosmann-Schwarzbach, *Manin pairs and moment maps*, J. Differential Geometry, 56 (2000) 133-165.
- [2] R. Aminou et Y. Kosmann-Schwarzbach, *Bigèbres de Lie, doubles et carrés*, Annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49, (4), (1988), 461-478.
- [3] M. Bangoura and Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28, 13-29, (1993).
- [4] H. Bursztyn and M. Crainic, *Quasi-Poisson theory via Dirac geometry*, Lecture given at the Summer School and Conference on Poisson Geometry, ICTP, Trieste, Italy (2005).
- [5] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet. Math. Dokl. 27 (1983) 68-71.
- [6] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. 1 (6) 1990, 1419-1457.
- [7] J. P. Dufour, *Introduction aux tissus*, séminaire GETODIM, Université de Montpellier, 1990-1991, 55-76.
- [8] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2004.
- [9] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York (1978).
- [10] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Quasi-bigèbres de Lie et groupes de Lie quasi-Poisson*, Compte rendus Acad. Sci. Paris, Série I, 312, (1991) 391-394.
- [11] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, in M. Gotay, J. E. Marsden, and V. Moncrief (eds), Mathematical Aspects of Field Theory (Proc. Seattle 1991), Contemporary Mathematics 132, Amer. Math. Soc. Providence, 1992, 459-489.
- [12] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, *Poisson Lie groups and complete integrability I, Drinfeld bialgebras, dual extensions and their canonical representation*, annales Inst. Henri Poincaré, Série A (Physique Théorique), 49 (4) (1988), 433-460.
- [13] J. L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série (1985) 257-271.
- [14] J. H. Lu, *Multiplicative and affine Poisson structures on Lie Groups*, Ph. D. Thesis, Univ. Calif. Berkeley 1990.
- [15] J. H. Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat décompositions*, J. Diff. Geometry, 31 (1990) , 501-526.
- [16] L. V. Sabinin, *Smooth quasi-groups and loops*, Mathematics and Its Applications, Volume 492, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1999).
- [17] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, *On the infinitesimal theory of local analytic loops*, Soviet. Math. Dokl. 36 (1988), 545-548.
- [18] L. V. Sabinin and P. O. Mikhéev, *quasigroups and differential geometry*, in quasigroups and loops. Theory and applications, O. Chen, H. O. Pflugfelder, J. D. Smith (eds), Heldermann Verlag, Berlin, 1990, Chap. 12.
- [19] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry 18 (1983), 523-557.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE CONAKRY,, BP 1147, RÉPUBLIQUE  
DE GUINÉE

*E-mail address:* `angoura@gn.refer.org`